Universidade Federal do Ceará
XXVI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa

Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Clodomir Silva Lima Neto
Gregório Pacelli Feitosa Bessa (Orientador)

Apoio: UFC, CNPq

1. Introdução

Em espaços lineares com uma topologia conveniente, deparamo-nos com três princípios a respeito de transformações lineares contínuas, a saber: Princípio da Limitação Uniforme, Princípio da Aplicação Aberta e Teorema de Hahn-Banach.

Estes princípios são fundamentais para muitos dos resultados modernos em tantos campos da Análise Linear como a Teoria Ergódica, a Existência da Medida Invariante, a Teoria da Integração, entre outros.

No presente trabalho iremos discorrer sobre o Teorema de Hahn-Banach, que é a base para vários teoremas de existência freqüentemente usados em Análise Linear. No entanto, apresentaremos a forma geométrica do mesmo, isto é, a separação de dois conjuntos convexos por um hiperplano.

2. Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que um funcional linear é uma transformação linear definida sobre E, ou sobre um subespaço de E, com valores em $\mathbb{R}$.

Teorema 1 (Hahn-Banach, forma analítica). Seja $p : E \to \mathbb{R}$ uma transformação linear verificando:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \ \forall\, x \in E \ \ \forall\, \lambda > 0 \tag{1}$$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \ \ \forall\, x, y \in E \tag{2}$$

Seja por outro lado, $G \subset E$ um subespaço de E e $g : G \to \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que

$$g(x) \leqslant p(x) \ \ \forall\, x \in G \tag{3}$$

Então existe um funcional linear f definido sobre E que extende g, ou seja,

$$g(x) = f(x) \ \ \forall\, x \in G$$

tal que

$$f(x) \leqslant p(x) \ \ \forall\, x \in E \tag{4}$$

O resultado essencial do Teorema 1 diz respeito à extensão de um funcional linear sobre um subespaço de E em um funcional linear definido sobre E.

3. Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Começamos por quaisquer preliminares sobre hiperplanos. Denote E por um espaço vetorial normado.

Definição. Um hiperplano é um conjunto da forma

$$H = \{x \in E\,;\, f(x) = \alpha\}$$

onde f é um funcional linear sobre E, não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que H é a equação do hiperplano $[f = \alpha]$.

Proposição. O hiperplano de equação $[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é contínuo.

Demonstração. É claro que se f é contínuo então H é fechado. Reciprocamente, suponha que H é fechado. O complementar H^c de H é aberto e não-vazio, haja vista que f não é identicamente nulo. Seja $x_0 \in H^c$ e suponha, para fixar as idéias, que $f(x) < \alpha$. Seja $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset H^c$ onde

$$B(x_0, r) = \{x \in E\,;\, \| x - x_0 \| < r\}$$

temos

$$f(x) < \alpha \ \ \forall\, x \in B(x_0, r) \tag{5}$$

Com efeito, suponha que $f(x_1 > \alpha)$ para um certo $x_1 \in B(x_0, r)$. O segmento

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1\,;\, t \in [0,1]\}$$

está contido dentro de $B(x_0, r)$ e portanto $f(x_t) \neq \alpha \ \ \forall\, t \in [0,1]$. Por outro lado, $f(x_t) = \alpha$ para $t = \dfrac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$, isto é, absurdo, logo (5) está demonstrado. Resulta de (5) que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \ \ \forall z \in B(0,1)$$

Por conseqüência, f é contínuo e $\| f \| \leqslant \dfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

Definição. Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$. Dizemos que o hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido amplo se

$$f(x) \leqslant \alpha \ \ \forall x \in A \text{ e } f(x) \geqslant \alpha \ \ \forall x \in B$$

Definição. Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$. Dizemos que H separa A e B no sentido estrito se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon \ \ \forall x \in A \text{ e } f(x) \geqslant \alpha + \varepsilon \ \ \forall x \in B$$

Definição. Um conjunto $A \subset E$ é convexo se

$$tx + (1-t)y \in A \ \ \forall x, y \in A \ \ \forall t \in [0,1]$$

Teorema 2 (Hahn-Banach, primeira forma geométrica). Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos, não-vazios e disjuntos. Suponha que A é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido amplo.

A demonstração do Teorema 2 está baseada nos dois lemas seguintes.

Lema 1. Seja $C \subset E$ um convexo aberto com $0 \in C$. Para todo $x \in E$ colocamos

$$p(x) = inf\{\alpha > 0\,;\, \alpha^{-1}x \in C\} \tag{6}$$

dizemos que p é a medida de C.

Então p verifica (1), (2) e

$$\exists M\,;\, 0 \leqslant p(x) \leqslant M \| x \| \quad \forall x \in E \tag{7}$$

$$C = \{x \in E\,;\, p(x) < 1\} \tag{8}$$

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$, é claro que

$$p(x) \leqslant \frac{1}{r} \| x \|$$

daí, segue-se (7).

A propriedade (1) é evidente.

Suponha de encontro que $x \in C$, como C é aberto, $(1+\varepsilon)x \in C$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, $p(x) \leqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Inversamente, se $p(x) < 1$ existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$ e portanto

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + 1(1-\alpha)0 \in C$$

assim, segue-se (8).

Sejam $x, y \in E$ e existe $\varepsilon > 0$. De acordo com (1) e (8) temos que $\dfrac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ e $\dfrac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Portanto, $\dfrac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \dfrac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ para todo $t \in [0,1]$. Em particular, para $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ obtemos que $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Deduzimos, graças à (1) e (8), que

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$$

logo, segue-se (2).

Lema 2. Seja $C \subset E$ um convexo aberto não-vazio e seja $x_0 \in E$ com $x_0 \notin C$. Então existe $f \in E^*$ (espaço dual de E) tal que $f(x) < f(x_0) \ \forall x \in C$. Em particular, a equação do hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ e C no sentido amplo.

Demonstração. Por translação vamos supor que $0 \in C$ e introduzindo a medida de C (Lema 1) denotada por p. Consideramos $G = \mathbb{R}x_0$ e um funcional linear g definido sobre g por:

$$g(tx_0) = t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

É claro que

$$g(x) \leqslant p(x) \ \ \forall x \in G$$

(tome $x = tx_0$ e distingua os casos $t > 0$ e $t \leqslant 0$). Graças ao Teorema 1, existe um funcional linear f sobre E, que extende g, tal que

$$f(x) \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E$$

Em particular, $f(x_0) = 1$ é contínuo graças à (7). Por outro lado, deduzimos de (8) que $f(x) < 1$ para todo $x \in C$.

Demonstração do Teorema 2. Colocamos $C = A - B$ de modo que C é convexo e aberto, além disso, $0 \notin C$, pois $A \cap B = \varnothing$. De posse do Lema 2, existe $f \in E^*$ tal que

$$f(z) < 0 \ \ \forall z \in C$$

daí

$$f(x) < f(y) \ \ \forall x \in A \ \ \forall y \in B$$

Fixamos $\alpha \in \mathbb{R}$ com

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in B} f(y)$$

e portanto o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa no sentido amplo A e B.

Teorema 3 (Hahn-Banach, segunda forma geométrica). Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos, não-vazios e disjuntos. Suponhamos que A é fechado e que B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$ colocamos $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ e $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ de modo que A_ε e B_ε são convexos, abertos e não-vazios. Além do mais, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, A_ε e B_ε são disjuntos (senão podemos extrair uma seqüência $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tais que $\| x_n - y_n \| < 2\varepsilon$; podemos extrair uma subseqüência $y_n \to y \in A \cap B$). De posse do Teorema 2, existe um hiperplano fechado de equação $[f = \alpha]$ que separa A_ε e B_ε no sentido amplo. Portanto,

$$f(x + \varepsilon z) \leqslant \alpha \leqslant f(y + \varepsilon z) \ \ \forall x \in A \ \ \forall y \in B \ \ \forall z \in B(0,1)$$

resultando que

$$f(x) + \varepsilon \| f \| \leqslant \alpha \leqslant f(y - \varepsilon \| f \| \ \ \ \forall x \in A \ \ \forall y \in B$$

Concluímos que A e B são separados no sentido estrito por um hiperplano $[f = \alpha]$, pois $\| f \| \neq 0$.