Quase-Nelson: lógica e fragmentos

Clodomir Silva Lima Neto, Umberto Rivieccio
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
Thiago Nascimento da Silva
Centro Brasileiro de Pesquisa em Avaliação e Seleção e de Promoção de Eventos

A lógica construtiva com negação forte (**N3**) foi introduzida por David Nelson em [6], no qual o conectivo unário de negação $\sim$ é involutivo. Todavia, a lógica paraconsistente de Nelson (**N4**), uma generalização de **N3** obtida ao abandonar o axioma da explosão $p \to (\sim p \to q)$, aparece mais tarde numa publicação junto com A. Almukdad [1]. É sabido que **N3** e **N4** são lógicas não-clássicas que possuem, como contrapartidas algébricas, a variedade das álgebras de Nelson e a variedade dos N4-reticulados, respectivamente. Uma outra generalização de **N3** é obtida ao eliminar a lei da dupla negação $\sim\sim p \to p$, isto é: a lógica quase-Nelson (**QNL**), que foi introduzida em [9] e cuja contrapartida algébrica é a variedade das álgebras quase-Nelson.

U. Rivieccio [7] introduziu a classe dos quase-N4-reticulados (QN4-reticulados), como uma generalização comum das variedades dos N4-reticulados e das variedades das álgebras quase-Nelson. Noutras palavras, os N4-reticulados acabam sendo precisamente os quase-N4-reticulados satisfazendo a lei da dupla negação, e as álgebras quase-Nelson são precisamente os QN4-reticulados que satisfazem a lei explosiva. As álgebras de Nelson, os N4-reticulados e as álgebras quase-Nelson podem ser representados através de estruturas *twist*. Para realizar isso, esta representação emprega estruturas *twist* definidas sobre álgebras Brouwerianas[1] enriquecidas com um operador de núcleo.

Dada uma álgebra $\mathbf{A}$ tendo uma operação $\to$ e os elementos $a, b \in A$, definimos as relações $\equiv$ e $\preceq$ como segue: $a \preceq b$ se, e somente se, $a \to b = (a \to b) \to (a \to b)$, e $\equiv := \preceq \cap (\preceq)^{-1}$. Assim, temos $a \equiv b$ se, e somente se, $a \preceq b$ e $b \preceq a$. Diante do exposto, temos condições de definir QN4-reticulados.

Definição 1 ([7], Def. 3.2)**.** Uma *quase-N4-reticulado (QN4-reticulado)* é uma álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \to, \sim \rangle$ do tipo $\langle 2, 2, 2, 1 \rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(QN4a) O reduto $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ é um reticulado distributivo com ordem do reticulado $\leq$.

(QN4b) A relação $\equiv$ é uma congruência sobre o reduto $\langle A; \wedge, \vee, \to \rangle$ e o quociente $B(\mathbf{A}) = \langle A; \wedge, \vee, \to \rangle / \equiv$ é uma álgebra Brouweriana. Além disso, o operador $\Box$ dado por $\Box[a] := \sim\sim a / \equiv$ para todo $a \in A$ é um núcleo, então a álgebra $\langle B(\mathbf{A}), \Box \rangle$é uma álgebra Brouweriana nuclear.

(QN4c) Para todos $a, b \in A$, é válido que $a \leq b$ se, e somente se, $a \preceq b$ e $\sim b \preceq \sim a$.

(QN4d) Para todos $a, b \in A$, é válido que $\sim(a \to b) \equiv \sim\sim(a \wedge \sim b)$.

(QN4e) Para todos $a, b \in A$,

(QN4e.1) $a \leq \sim\sim a$.

(QN4e.2) $\sim a = \sim\sim\sim a$.

(QN4e.3) $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$.

(QN4e.4) $\sim\sim a \wedge \sim\sim b = \sim\sim(a \wedge b)$.

[1] Uma *álgebra Brouweriana* é precisamente o sub-reduto livre do 0 de uma álgebra de Heyting.

A contrapartida lógica dos QN4-reticulados ($\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}$) foi introduzida em [4] através de um cálculo estilo Hilbert. O cálculo para $\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}$ consiste nos seguintes esquemas de axiomas junto com a única regra de inferência MP (*modus ponens*): $p,\, p \to q \vdash q$.

Ax1 $p \to (q \to p)$

Ax2 $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Ax3 $(p \wedge q) \to p$

Ax4 $(p \wedge q) \to q$

Ax5 $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$

Ax6 $p \to (p \vee q)$

Ax7 $q \to (p \vee q)$

Ax8 $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

Ax9 ${\sim}(p \vee q) \leftrightarrow ({\sim}\, p \wedge {\sim}\, q)$

Ax10 ${\sim}(p \to q) \leftrightarrow {\sim}{\sim}(p \wedge {\sim}\, q)$

Ax11 ${\sim}(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow {\sim}((p \wedge q) \wedge r)$

Ax12 ${\sim}(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow {\sim}((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

Ax13 ${\sim}(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow {\sim}((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Ax14 ${\sim}{\sim}(p \wedge q) \leftrightarrow ({\sim}{\sim}\, p \wedge {\sim}{\sim}\, q)$

Ax15 $p \to {\sim}{\sim}\, p$

Ax16 $p \to ({\sim}\, p \to {\sim}(p \to p))$

Ax17 $(p \to q) \to ({\sim}{\sim}\, p \to {\sim}{\sim}\, q)$

Ax18 ${\sim}\, p \to {\sim}(p \wedge q)$

Ax19 ${\sim}(p \wedge q) \to {\sim}(q \wedge p)$

Ax20 $({\sim}\, p \to {\sim}\, q) \to ({\sim}(p \wedge q) \to {\sim}\, q)$

Ax21 $({\sim}\, p \to {\sim}\, q) \to (({\sim}\, r \to {\sim}\, s) \to ({\sim}(p \wedge r) \to {\sim}(q \wedge s)))$

Ax22 ${\sim}{\sim}{\sim}\, p \to {\sim}\, p.$

$\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}$ desfruta do Clássico Teorema da Dedução: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ é equivalente a $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Para uma lógica algebrizável $\mathbf{L}$ [3, Def. 3.11], dizemos que $\mathbf{L}$ é *finitamente algebrizável* quando o conjunto de fórmulas de equivalências é finito, e dizemos que $\mathbf{L}$ é *BP-algebrizável* quando $\mathbf{L}$ é finitamente algebrizável e o conjunto de identidades definidoras é finito. Usando as seguintes abreviações:

$$x \Rightarrow y := (x \to y) \wedge ({\sim}\, y \to {\sim}\, x) \qquad\qquad x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$$

inferimos que $\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}$ é BP-algebrizável com a identidade definidora $E(\alpha) := \alpha \approx \alpha \to \alpha$ e a fórmula de equivalência $\Delta(\alpha, \beta) := \alpha \Leftrightarrow \beta$. Com base nesse resultado, obtemos uma axiomatização da semântica quase-variedade equivalente $\mathrm{Alg}^*(\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}})$ de $\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}$. Como mostrado em [4, Cor. 1], a classe de álgebras introduzidas coincide com a variedade de QN4-reticulados, isto é, $\mathrm{Alg}^*(\mathbf{L}_{\mathrm{QN4}}) = \mathsf{QN4}$.

A lógica quase-Nelson (**QNL**), vista como uma lógica subestrutural, é a extensão axiomática do cálculo *Full Lambek* com as regras *exchange* e *weakening* ($\mathbf{FL}_{ew}$) pelo axioma de Nelson, a saber:

$$((p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \wedge (\sim q \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

e tendo como contrapartida algébrica a variedade dos reticulados residuados chamada *álgebras quase-Nelson* (QNA). T. Nascimento e U. Rivieccio [5] iniciaram o estudo dos fragmentos de **QNL**, que correspondem aos sub-redutos de QNA. No artigo em questão, temos uma axiomatização do fragmento $\{\sim, \rightarrow\}$ (apelidado de *álgebras de implicação quase-Nelson*, QNI), para o qual foi introduzido um cálculo estilo Hilbert, que por sua vez é BP-algebrizável com respeito à variedade QNI. Dando continuidade aos estudos dos fragmentos de **QNL**, os autores detectaram que alguns deles não são algebrizáveis, no sentido de [2]; como exemplo deste caso, temos o fragmento $\{\sim, *\}$ cuja classe de sub-redutos de QNA é chamada monóides quase-Nelson. Entretanto, ainda estamos trabalhando na axiomatização dos fragmentos algebrizáveis, tais como $\{\sim, \rightarrow, *\}$ e $\{\sim, \rightarrow, \wedge\}$, cujo sub-redutos são denominados *quase-Nelson pocrims* e *quase-Nelson semihoops*, respectivamente. Convém destacar que a metodologia para caracterizar algebricamente tais fragmentos têm sido com a utilização da generalização das estruturas *twist* para as lógicas de Nelson e quase-Nelson (ver [8]).

Referências

[1] Almukdad, A.; Nelson, D. Constructible falsity and inexact predicates. *Journal of Symbolic Logic* 49:231–233, 1984.

[2] Blok, W. J.; Pigozzi, D. *Algebraizable Logics*. Advanced Reasoning Forum, 2014.

[3] Font, J. M. *Abstract Algebraic Logic: An Introductory Textbook*. Imperial College Press, 2016.

[4] Lima Neto, C. S.; Nascimento, T.; Rivieccio, U. In: 10th International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL 2022), University of Łódź, Poland, 2022. *Algebraizability of the Logic of Quasi-N4-Lattices*. EPTCS 358, pp. 240–253, 2022.

[5] Nascimento, T.; Rivieccio, U. Negation and Implication in Quasi-Nelson Logic. *Logical Investigations* 27:107–123, 2021.

[6] Nelson, D. Constructible falsity. *Journal of Symbolic Logic* 14:16–26, 1949.

[7] Rivieccio, U. Quasi-N4-lattices. *Soft Computing* 26:2671–2688, 2022.

[8] Rivieccio, U. *Fragments of Quasi-Nelson: Residuation*. Submetido.

[9] Rivieccio, U.; Spinks, M. In: 13th Workshop on Logical and Semantic Frameworks with Applications (LSFA 2018). *Quasi-Nelson Algebras*. ENTCS 344, pp. 169–188, 2018.