Trigonometria nos Vestibulares Cearenses

Clodomir Silva Lima Neto
IFCE câmpus Maranguape

Francisco Odécio Sales
IFCE câmpus Itapipoca

Francisco Erilson Freire de Oliveira
IFTO câmpus Paraíso do Tocantins

O Estado do Ceará possui sete instituições de ensino superior público, sendo três estaduais (UECE - Universidade Estadual do Ceará, URCA - Universidade Regional do Cariri, UVA - Universidade Estadual Vale do Acaraú) e quatro federais (IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, UFC - Universidade Federal do Ceará, UFCA - Universidade Federal do Cariri, UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira).

As universidades estaduais ainda mantém o vestibular tradicional para a seleção dos seus alunos. Contudo, as federais selecionam a partir do desempenho do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), porém anos atrás existia o vestibular tradicional.

Nesse artigo será apresentado um resumo teórico com os principais tópicos de Trigonometria e uma lista de questões, com nossas soluções, extraída dos mais distintos vestibulares cearenses para fixar e aprofundar os conceitos apresentados.

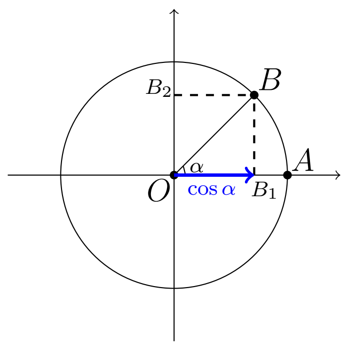
Resumo Teórico

- Relação fundamental da trigonometria

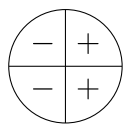
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Funções trigonométricas

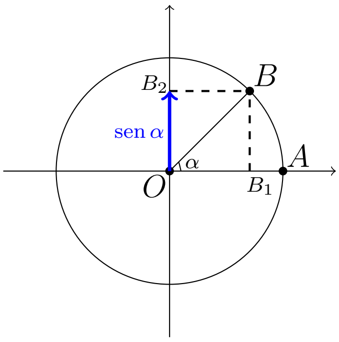
  1. Função Cosseno



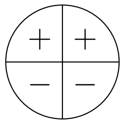
Quadro de Sinal



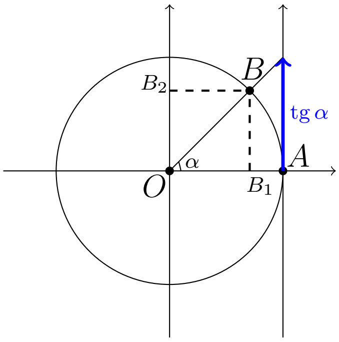
2. Função Seno



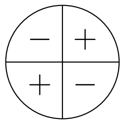
Quadro de Sinal



3. Função Tangente

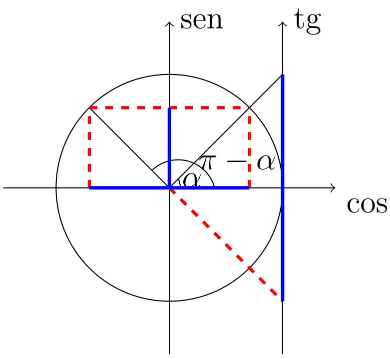


Quadro de Sinal



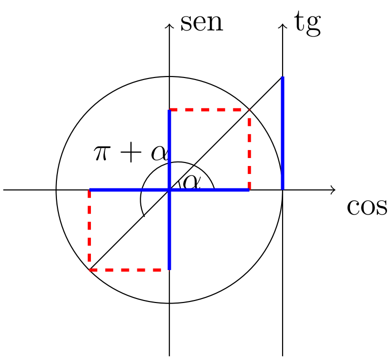
- Redução ao Primeiro Quadrante

1. Redução do 2° ao 1° quadrante



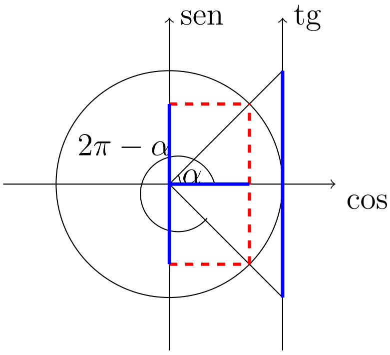
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

2. Redução do 3° ao 1° quadrante



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

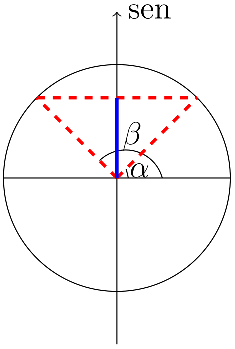
3. Redução do 4° ao 1° quadrante



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi-\alpha) &=& -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha) &=& \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(2\pi-\alpha) &=& -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

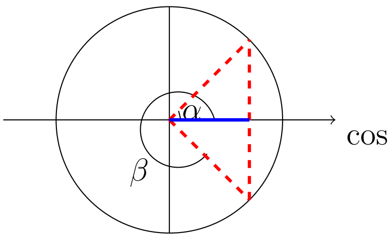
- Equações Trigonométricas

1. $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$



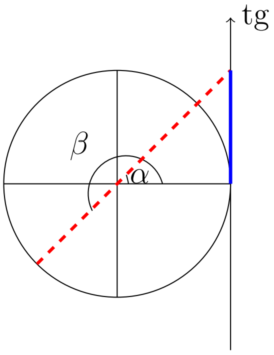
$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta &=& \alpha + 2k\pi \\ \beta &=& \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

2. $\cos\beta = \cos\alpha$



$$\cos\beta = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta &=& \alpha + 2k\pi \\ \beta &=& -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

3. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$



$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta &=& \alpha + 2k\pi \\ \beta &=& \pi + \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

- Principais de Fórmulas

1. $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$
2. $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$
3. $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$
4. $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$
5. $\operatorname{sen}(2a) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$
6. $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
7. $\operatorname{tg}(2a) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
8. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$
9. $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$
10. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$
11. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
12. $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
13. $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
14. $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

Questões de Vestibulares Cearenses

As questões selecionadas para o presente artigo serão apresentadas por sua ordem cronológica.

1. (**UFC 2002**) Sabendo que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e que $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{1}{2}$, podemos afirmar corretamente que $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

   (a) 0.

   (b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

   (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

   (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

(e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Solução. Sejam $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta=-\dfrac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é **(c)**. □

2. (**UFC 2005**) Determine os valores do ângulo x, em radianos, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, tais que $\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x=-1$.

Solução. Visando resolver a equação trigonométrica $\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x=-1$, dividiremos ambos os membros por 2, isto é,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2}$$

Reescrevendo, de modo conveniente, a equação acima, temos

$$\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

Logo, no intervalo $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, deduzimos que

$$\begin{cases}
\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{6}\Rightarrow x=\pi\\
\text{ou}\\
\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}
\end{cases}$$

Portanto, no intervalo supracitado, temos as soluções: $x=\pi$ rad ou $x=\dfrac{5\pi}{3}$ rad. □

3. (**IFCE 2006.2**) O valor de $(\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{cotg}10^\circ)\cdot\operatorname{sen}20^\circ$ é:

(a) $\dfrac{1}{2}$.

(b) 1.

(c) 2.

(d) $\dfrac{5}{3}$.

(e) 3.

Solução. Usando a fórmula do arco duplo para o seno, obtemos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{cotg} 10^\circ) \cdot \operatorname{sen} 20^\circ &= \left(\frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 10^\circ} + \frac{\cos 10^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ}\right) \cdot 2 \operatorname{sen} 10^\circ \cos 10^\circ \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ}{\cos 10^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}\right) \cdot 2 \operatorname{sen} 10^\circ \cos 10^\circ \\
&= 1 \cdot 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é **(c)**. □

4. (**IFCE 2007.2**) Os números reais $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, então o valor de $\operatorname{sen} x$ é:

   (a) $\frac{1}{4}$.

   (b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

   (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

   (d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

   (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução. O termo médio entre três números consecutivos de uma PA (progressão aritmética) corresponde a média aritmética do antecessor e do sucessor. Noutras palavras,

$$\text{PA}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é **(d)**. □

5. (**UECE 2018.2**) Usando fórmulas trigonométricas, pode-se expressar $\operatorname{sen}(3t)$ em função de $\operatorname{sen}(t)$. A partir disso, pode-se obter um polinômio P com coeficientes inteiros que admite $\operatorname{sen}(10^\circ)$ como uma raiz ($P(\operatorname{sen}(10^\circ)) = 0$). Esse polinômio é:

   (a) $P(x) = 8x^3 + 6x - 1$.

   (b) $P(x) = -8x^3 + 6x - 1$.

   (c) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 + x - 1$.

   (d) $P(x) = -8x^3 + 6x^2 - 1$.

Solução. Devemos expressar $\operatorname{sen}(3t)$ em função de $\operatorname{sen}(t)$. Para tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(3t) &= \operatorname{sen}(2t+t)\\
&= \operatorname{sen}2t\cos t + \operatorname{sen}t\cos 2t\\
&= (2\operatorname{sen}t\cos t)\cos t + \operatorname{sen}t(1-2\operatorname{sen}^2 t)\\
&= 2\operatorname{sen}t\cos^2 t + \operatorname{sen}t - 2\operatorname{sen}^3 t\\
&= 2\operatorname{sen}t(1-\operatorname{sen}^2 t) + \operatorname{sen}t - 2\operatorname{sen}^3 t\\
&= 3\operatorname{sen}t - 4\operatorname{sen}^3 t
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{sen}(3t) = -4\operatorname{sen}^3 t + 3\operatorname{sen}t$.

Agora, tome $t = 10^\circ$, daí

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = 3\operatorname{sen}(10^\circ) - 4\operatorname{sen}^3(10^\circ)$$

O que acarreta

$$\frac{1}{2} = 3\operatorname{sen}(10^\circ) - 4\operatorname{sen}^3(10^\circ)$$

Como consequência

$$-8\operatorname{sen}^3(10^\circ) + 6\operatorname{sen}(10^\circ) - 1 = 0$$

Inferindo assim, que $\operatorname{sen}(10^\circ)$ é raiz do polinômio $P(x) = -8x^3 + 6x - 1$. Portanto, a alternativa correta é **(b)**. □

6. (**URCA 2018.2**) O valor de $y = 36\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{7}$ é:

   (a) 1.

   (b) 2.

   (c) $\dfrac{9}{2}$.

   (d) $\dfrac{5}{2}$.

   (e) 3.

Solução. É sabido que $y = 36\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$, multiplicando ambos os membros dessa equação por $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$, obtemos

$$\begin{aligned}
y\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} &= 36\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\\
&= 18\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&= 18\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&= 9\left(2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cos\frac{3\pi}{7}\\
&= 9\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}
\end{aligned}$$

Usando a fórmula $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
y\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} &= 9\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\\
&= \frac{9}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}
\end{aligned}$$

Acarretando assim, $y = \frac{9}{2}$. Portanto, a alternativa correta é **(c)**. □

7. (**UVA 2018.2**) Três luzes, L_1, L_2 e L_3, piscam em frequências diferentes ao longo do tempo t, de acordo com as funções $y = |\operatorname{sen}(t)|$, $y = |\operatorname{sen}(3t)|$ e $y = |\operatorname{sen}(t+\pi)|$, respectivamente, isto é, brilham na intensidade máxima quando sua respectiva função atinge o valor máximo e estão totalmente apagadas quando sua respectiva função atinge o valor mínimo. Nestas condições, é correto afirmar:

   (a) As três luzes jamais ficam totalmente apagadas simultaneamente.

   (b) Num intervalo de tempo no qual L_1 atinge sua intensidade máxima por, pelo menos, duas vezes, L_3 terá atingido seu brilho máximo mais do que duas vezes.

   (c) As três luzes jamais brilham na intensidade máxima simultaneamente.

   (d) Num intervalo de tempo no qual L_1 atinge sua intensidade máxima por, pelo menos, duas vezes, L_2 terá atingido seu brilho máximo mais do que duas vezes.

Solução. Inicialmente, note que o comportamento de L_3 é equiparável ao comportamento de L_1, haja vista que

$$|\operatorname{sen}(t+\pi)| = |-\operatorname{sen} t| = |\operatorname{sen} t|$$

Assim, as supracitadas luzes atingem seu máximo quando $|\operatorname{sen} t| = 1$, ou seja,

$$\begin{cases}
\operatorname{sen} t = -1 \Rightarrow t \in \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots\right\}\\
\text{ou}\\
\operatorname{sen} t = 1 \Rightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots\right\}
\end{cases}$$

Logo, $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots\right\}$.

Contudo, a luz L_2 atinge seu máximo quando $|\operatorname{sen} 3t| = 1$, isto é,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 3t = -1 \Rightarrow t \in \left\{\frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \ldots\right\} \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} 3t = 1 \Rightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \ldots\right\} \end{cases}$$

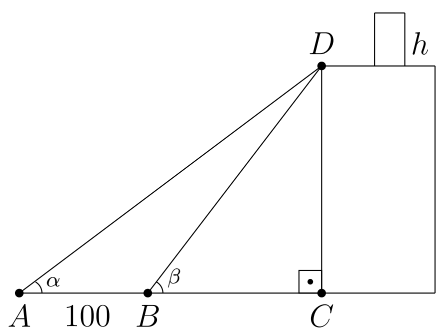
Assim, $t \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \ldots\right\}$.

Como consequência, deduzimos que num intervalo de tempo no qual L_1 e L_3 atingem sua intensidade máxima por, pelo menos, duas vezes, L_2 terá atingido seu brilho máximo mais do que duas vezes. Portanto, a alternativa correta é **(d)**. □

8. (**UVA 2019.1**) Uma operadora de celular deseja instalar uma antena na cobertura de um prédio localizado em uma rua plana. Para melhor funcionamento, o topo da antena deve ficar a uma altura mínima de 240m em relação ao solo. Os técnicos da empresa calculam a altura do prédio depois de duas observações: em um ponto A da rua, do qual é possível ver o prédio por inteiro, mede-se o ângulo de elevação do topo do prédio com relação ao solo. Seguindo-se 100m em linha reta do ponto A em direção ao prédio, marca-se o ponto B e mede-se o novo ângulo de elevação. Sabendo que os ângulos observados em A e B têm tangentes $0,9$ e $1,6$, respectivamente, e que a antena deve ser construída com uma altura de medida inteira, assinale a alternativa que apresenta a altura mínima da antena a ser instalada:

   (a) 35 metros.
   (b) 205 metros.
   (c) 240 metros.
   (d) 275 metros.

Solução. Conforme o enunciado, temos:



Do triângulo ACD, inferimos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB} + 100} \Rightarrow 0,9 = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB} + 100} \Rightarrow \overline{CD} = 0,9\,\overline{CB} + 90$$

Agora, do triângulo BCD, temos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} \Rightarrow 1,6 = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{CD} = 1,6\,\overline{CB}$$

O sistema linear $\begin{cases} \overline{CD} = 0,9\,\overline{CB} + 90 \\ \overline{CD} = 1,6\,\overline{CB} \end{cases}$, nos dá $\overline{CB} \approx 128,57$ e $\overline{CD} \approx 205,71$. Porém, a altura mínima para a antena deve ter 240m em relação ao solo,

$$\overline{CD} + h \geqslant 240 \Rightarrow 205,71 + h \geqslant 240 \Rightarrow h \geqslant 34,29$$

Entretanto, $h \in \mathbb{Z}$, segue que $h = 35$m. Portanto, a alternativa correta é **(a)**.

$\square$

9. (**URCA 2020.2**) O conjunto solução da inequação $2\operatorname{sen}^2 x + \cos x > 2$, para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ é:

   (a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

   (b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

   (c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

   (d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

   (e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Solução. Devemos determinar o conjunto solução da seguinte inequação trigonométrica $2\operatorname{sen}^2 x + \cos x > 2$, para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Para tanto,

$$2\operatorname{sen}^2 x + \cos x > 2 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 2 > 0 \Rightarrow -2\cos^2 x + \cos x > 0$$

Tomando $y = \cos x$, teremos a inequação do segundo grau $-2y^2 + y > 0$, cujo conjunto solução é dado por $\left\{y \in \mathbb{R}; 0 < y < \dfrac{1}{2}\right\}$, isto é, $0 < \cos x < \dfrac{1}{2}$.

Contudo, para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, a supramencionada inequação simultânea nos dá

$$\begin{cases} \cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\[2ex] \cos x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Por fim, calculando a interseção dos intervalos acima, inferimos que $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Portanto, a alternativa correta é **(e)**. $\square$

10. (**UECE 2021.1**) Se M é a matriz $M = \begin{bmatrix} \text{sen}(x) & -\cos(x) & 1 \\ \cos(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det(M)$ é o determinante de M, então, para um número inteiro k, todas as soluções x da equação $\det(M) = 0$ são da forma

(a) $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(b) $\pi + k\pi$.

(c) $\pi + 2k\pi$.

(d) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Solução. Usando o Teorema de Laplace para calcular o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} \text{sen}(x) & -\cos(x) & 1 \\ \cos(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{aligned} \det M &= \text{sen}\,(x) \cdot \begin{vmatrix} \text{sen}\,(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-\cos(x)) \cdot \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}\,(x) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \text{sen}^2(x) + \cos^2(x) - \text{sen}\,(x) \\ &= 1 - \text{sen}\,(x) \end{aligned}$$

Agora, devemos determinar todas as soluções x para que $\det M = 0$. Para tanto,

$$1 - \text{sen}\,(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a alternativa correta é **(a)**. □

Referências

[1] ANTAR NETO, A. *et al.* Noções de Matemática, 3: trigonometria. Fortaleza: Vest-Seller, 2009.

[2] CEPS-UVA. Página inicial. Disponível em: `<http://www.uvanet.br/ceps/>`. Acesso em: 03 de mar. de 2022.

[3] CEV-UECE. Página inicial. Disponível em: `<http://www.uece.br/cev/>`. Acesso em: 03 de mar. de 2022.

[4] CEV-URCA. Página inicial. Disponível em: `http://cev.urca.br/cev/>`. Acesso em: 03 de mar. de 2022.

[5] IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[6] OLIVEIRA, M. R. Elementos da Matemática, 5: trigonometria e geometria espacial. Fortaleza: VestSeller, 2018.